

Corrigé

1. a. La pièce étant équilibrée, on est en situation d'équiprobabilité. On en déduit la loi de la variable aléatoire X_k .

x_i	0	k
$P(X_k = x_i)$	0,5	0,5

- b. On a donc, pour tout $k \in \{1; \dots; n\}$, $E(X_k) = 0 \times 0,5 + k \times 0,5 = \frac{k}{2}$.
 - c. Pour tout $k \in \{1; \dots; n\}$, $V(X_k) = 0,5 \times \left(0 - \frac{k}{2}\right)^2 + 0,5 \times \left(k - \frac{k}{2}\right)^2 = \frac{k^2}{8} + \frac{k^2}{8} = \frac{k^2}{4}$.
2. a. D'après sa définition, pour tout $\ell \in \{1; \dots; n\}$, on a $Y_\ell = X_1 + \dots + X_\ell$.

- b. $E(Y_\ell) = E(X_1) + \dots + E(X_\ell) = \frac{1}{2}(1 + \dots + \ell) = \frac{1}{2} \times \frac{\ell(\ell+1)}{2} = \frac{\ell(\ell+1)}{4}$ On cherche maintenant à résoudre $E(Y_\ell) > 280$.

$$E(Y_\ell) > 280 \Leftrightarrow \frac{\ell(\ell+1)}{4} > 280 \Leftrightarrow \ell^2 + \ell > 1120 \Leftrightarrow \ell^2 + \ell - 1120 > 0.$$

On reconnaît un polynôme du second degré avec $a = 1$, $b = 1$ et $c = -1120$.

Puisque $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1120) = 4481$, $\Delta > 0$ et donc le polynôme

étudié admet deux racines réelles distinctes : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{4481}}{2 \times 1} \approx$

$$-33,97 \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{4481}}{2 \times 1} \approx 32,97.$$

On obtient ainsi le tableau de signes suivant.

ℓ	$-\infty$	$x_1 \approx -33,97$	$x_2 \approx 32,97$	$+\infty$	
$\ell^2 + \ell - 1120$	+	0	-	0	+

Il faut donc au moins 33 lancers pour que le gain moyen dépasse 280 euros.

- c. On va montrer par récurrence que pour tout $m \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^m k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

Initialisation : $1^2 = 1$ et $\frac{1 \times (1+1) \times (2 \times 1 + 1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$.

Donc la proposition est vraie au rang 1.

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier m tel que :

$$\sum_{k=1}^m k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

Montrons alors que cette formule est aussi vraie au rang $m+1$, c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{m+1} k^2 = \frac{(m+1)(m+1+1)(2(m+1)+1)}{6} = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}.$$

On a $\sum_{k=1}^{m+1} k^2 = \sum_{k=1}^m k^2 + (m+1)^2$ donc, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\sum_{k=1}^{m+1} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2 = \frac{m(m+1)(2m+1) + 6(m+1)^2}{6}.$$

En factorisant, on obtient alors :

$$\sum_{k=1}^{m+1} k^2 = \frac{(m+1)[m(2m+1) + 6(m+1)]}{6} = \frac{(m+1)(2m^2 + 7m + 6)}{6}.$$

Or,
$$\frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6} = \frac{(m+1)(2m^2 + 7m + 6)}{6}.$$

Ainsi,
$$\sum_{k=1}^{m+1} k^2 = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}.$$

Conclusion : On a montré que l'égalité était vraie au rang $m = 1$, puis que si elle était vraie pour un entier naturel non nul m quelconque, alors elle est vraie au rang $m + 1$. D'après le principe de récurrence, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{m+1} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

Les variables X_k étant indépendantes (les résultats obtenus lors des lancers précédents n'ayant pas d'influence sur les lancers futurs), on a :

$$V(Y_\ell) = V(X_1) + \dots + V(X_\ell).$$

Or, pour tout $k \in \{1; \dots; n\}$, $V(X_k) = \frac{k^2}{4}$.

D'où
$$V(Y_\ell) = \frac{1^2}{4} + \dots + \frac{\ell^2}{4} = \frac{1}{4}(1^2 + \dots + \ell^2) = \frac{\ell(\ell+1)(2\ell+1)}{24}.$$